Ueber die Transversalschwingungen eines elastischen, homogenen, endlichen Kreiscylinders und einer solchen Kugel.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der

Philosophischen Facultät der Königlichen Universität Breslau

zur Erlangung der Doctorwürde

Dienstag, den 11. März 1879, Vormittags 11 Uhr

öffentlich vertheidigen wird

PAUL JAERISCH

AGAD. LUGD.BAT. BIBL.

gegen die Herren Opponenten

L. ESTERMANN,
Lehrer
an der höheren Bürgerschule Nr. 2.

P. BAUMERT,
Drd. phil.

BRESLAU
Buchdruckerei von HEINRICH LINDNER.
1879.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn

PROFESSOR Dr. O. E. MEYER

in Hochachtung und Dankbarkeit

gewidmet

vom VERFASSER

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543119_0081

Die reiche Literatur der Elasticitäts-Theorie enthält mannigfache Probleme, die sich auf einen homogenen Kreiscylinder von endlicher Ausdehnung und eine solche Kugel beziehen[1]). Die Bewegungserscheinungen derselben haben aber keine allgemeine Behandlung gefunden. Die dazu erforderliche Transformation der Differentialgleichungen in Cylinder- und Kugelcoordinaten ist von LAMÉ gegeben[2]), die allgemeine Integration derselben für den Fall des Gleichgewichts einer Kugel[3]). Die Bewegungsgleichungen behandelt er nur insoweit, als sie longitudinale Schwingungen liefern, obwohl nicht vollständig.

Das Folgende enthält die Lösung des Problems der Transversalschwingungen von Kugel und Cylinder. Es ergiebt sich dabei, dass von den Componenten der transversalen Verrückung eines Cylindertheilchens die beiden in der Richtung der Axe und des Radius genommenen verschwinden, dass also die gesammten Transversalschwingungen nur in Torsionsschwingungen bestehen können. Auch findet die gewöhnliche Annahme über die Torsionsbewegung eines Kreiscylinders ihre Bestätigung. Es erleiden alle Theilchen eines Querschnitts, welche von der Cylinder-Axe gleich weit abstehen, eine von der Lage im Querschnitt unabhängige Torsionsverrückung.

---

[1]) Mit den Schwingungen elastischer Körper haben sich vor LAMÉ besonders POISSON und CAUCHY beschäftigt:

POISSON, Mémoire de l'Académie de France. Tome VIII und XIIX.
Journale de l'Ecole polytechnique. Cahier XX.

CAUCHY, Exercices de Mathématique Tome III und IV.

[2]) LAMÉ, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris 1852.

[3]) LIONVILLE, Journal Bd. XIX 1854.

Die Kugel zeigt ein ähnliches Verhalten. Doch erleiden ihre Theilchen neben der einfachen, beim Cylinder allein möglichen Torsionsverrückung noch eine allgemeinerer Art.

Es scheint von Interesse, dass bei beiden Problemen ausser den Cylinder- und Kugelfunctionen noch zwei andere diesen verwandte Functionen auftreten, von denen die auf den Cylinder bezüglichen den Cylinderfunctionen gerade so ähnlich gebildet sind, wie die auf die Kugel bezüglichen den Kugelfunctionen. Die Ableitung ihrer Haupteigenschaften, welche denen der Cylinder- und Kugelfunctionen völlig ähnlich sind, sowie die Beziehungen, die zwischen ihnen und diesen bestehen, soll daher den Schluss der Untersuchung bilden.

Wir beginnen mit dem Cylinderproblem und behandlen im Anschluss daran das entsprechende Kugelproblem.

I.

Trennung der allgemeinen in Cylindercoordinaten transformirten Gleichungen in solche für longitudinale und transversale Schwingungen.

Auf folgende Form lassen sich die Elasticitätsgleichungen in rechtwinkligen, wie in Cylinder- und Kugelcoordinaten bringen:

$$(\lambda+2\mu)\, a \frac{d\Theta}{dx}+\mu F\left(b\frac{du}{dx}\ \ldots\right)=\rho\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Diese ist von Bedeutung, weil sie erkennen lässt, dass sich die Verrückungen aus zwei Theilen, einem longitudinalen und einem transversalen, zusammensetzen. Darin bezeichnet u eine der drei Componenten der Verrückung, x eine der drei Coordinaten, t die Zeit, Θ die Volumenänderung, a und b gewisse gegebene Functionen der unabhängigen Veränderlichen, die für rechtwinkliche Coordinaten $= 1$ sind, F eine von den Differentialquotienten der Verrückungen und den b abhängige Function, λ und μ die Elasticitätsconstanten und ρ die Dichtigkeit.

Es lässt sich nämlich für rechtwinkliche Coordinaten leicht nachweisen, dass sich jede elastische Verrückung zerlegt nach der Richtung ihrer Fortpflanzung und senkrecht

dagegen; und zwar ist $\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen, $\frac{\mu}{\rho}$ das der transversalen Schwingungen [1]). Beide Schwingungszustände können die Gleichungen nicht zu gleicher Zeit liefern, da sich zeigt, dass für longitudinale Schwingungen die Functionen F verschwinden, für transversale die Volumenänderung $\Theta = 0$ ist. Die Zerlegung der Verrückungen ist daher für rechtwinklige Coordinaten gestattet in $u = u' + u''$, $v = v' + v''$, $w = w' + w''$, wenn u', v', w' die longitudinale, u'', v'', w'' die transversale Verrückung bedeuten, so dass wir zur Bestimmung der longitudinalen die Gleichungen erhalten:

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\frac{d\Theta}{dx} = \frac{d^2u'}{dt^2}, \quad F\left(\frac{du'}{dx}\ldots\right) = 0$$

. . . . . ,

und zur Bestimmung der transversalen:

$$\frac{\mu}{\rho} F\left(\frac{du''}{dx}\ldots\right) = \frac{d^2u''}{dt^2}, \quad \Theta = 0.$$

. . . . . .

In gleicher Weise verfährt Lamé bei Anwendung von Cylinder- und Kugelcoordinaten. Aber die obigen Schlüsse behalten nur zum Theil ihre Gültigkeit. Zwar ist die Eigenschaft des Mediums, dass sich jede Schwingung zerlegt in eine longitudinale und eine transversale, vom Coordinatensysteme unabhängig; und auch jetzt ist $\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Longitudinal-, $\frac{\mu}{\rho}$ für Transversalschwingungen.

Dass aber die Elasticitätsgleichungen in Cylinder- oder Kugelcoordinaten auch nur transversale Schwingungen liefern, wenn wir $\Theta = 0$ setzen, und ob, so zu sagen, der ganze transversale Theil aus den Gleichungen ausgeschieden ist, wenn wir die $F = 0$ bestimmen, ist nicht ohne Weiteres klar. Aber erst dann, wenn der Beweis dafür gegeben, ist die Zerlegbarkeit der Verrückungen erwiesen. Den directen Beweis, der complicirte Rechnungen erforderlich macht, können wir

[1]) Lamé: Leçons etc. § 59.

umgehen. Denn wenn sich erweisen lässt, dass Θ nur von der einen Constanten $\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, die Functionen F aber nur von $\frac{}{\rho}$ abhängen, so muss die Zerlegung auch der rechten Seiten der Gleichungen in zwei Theile möglich sein, von denen der eine nur von $\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, der andere nur von $\frac{\mu}{\rho}$ abhängt.

Bevor dieser Nachweis geführt wird, sollen erst die zu benützenden, von LAMÉ transformirten Elasticitätsformeln und -Gleichungen gegeben werden, und zwar wenden wir uns nun speciell zum Cylinderproblem.

Sind r, φ, z die Cylindercoordinaten, wo r den Abstand eines Massentheilchens von der Cylinderaxe, φ den Winkel, den r mit einer festen durch diese gelegten Ebene bildet, z den Abstand von einem festen Querschnitt bedeutet, so dass die rechtwinkligen Coordinaten gesetzt sind: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$; sind ferner u, v, w die Componenten der Verrückung und zwar u nach der Richtung von r, v nach der Richtung der Tangente im Querschnitt, w nach der Richtung der Axe; werden endlich die innern Normaldruckcomponenten mit R_1, Φ_2, Z_3, die innern Tangentialdruckcomponenten mit $\Phi_3 = Z_2$, $Z_1 = R_3$, $R_2 = \Phi_1$, und die auf das Innere wirkenden, äusseren Kräfte mit R_0, Φ_0, Z_0 bezeichnet, wo die Buchstaben R, Φ, Z die Richtung der Normale der Druckfläche angeben; — so ist die allgemeinste Form für die Bewegungsgleichungen des Kreiscylinders:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dR_1}{dr} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dR_2}{d\varphi} + \dfrac{dR_3}{dz} + \dfrac{R_1 - \Phi_2}{r} + \rho R_0 = \rho\dfrac{d^2u}{dt^2} \\ \dfrac{d\Phi_1}{dr} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\Phi_2}{d\varphi} + \dfrac{d\Phi_3}{dz} + \dfrac{\Phi_1 + R_2}{r} + \rho\Phi_0 = \rho\dfrac{d^2v}{dt^2} \\ \dfrac{dZ_1}{dr} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dZ_2}{d\varphi} + \dfrac{dZ_3}{dz} + \dfrac{Z}{r} + \rho Z_0 = \rho\dfrac{d^2w}{dt^2}. \end{cases}$$

Dabei sind die Volumenänderung und die Druckcomponenten durch folgende Ausdrücke in den Verrückungen gegeben:

$$(2)\quad \begin{cases} \Theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{dru}{dr} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{drv}{d\varphi} + \dfrac{dw}{dz} \\ R_1 = \lambda\Theta + 2\mu\dfrac{du}{dr} \\ \Phi_2 = \lambda\Theta + 2\mu\left(\dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dv}{d\varphi}\right) \\ Z_3 = \lambda\Theta + 2\mu\dfrac{dw}{dz} \\ \Phi_3 = Z_2 = \mu\left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{d\varphi}\right) \\ Z_1 = R_3 = \mu\left(\dfrac{dw}{dr} + \dfrac{du}{dr}\right) \\ R_2 = \Phi_1 = \mu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{du}{d\varphi} + r\dfrac{d\frac{v}{r}}{dr}\right) \end{cases}$$

Führt man diese Werthe der Druckcomponenten in das Gleichungensystem (1) ein, so erscheint dasselbe in einer zwar weniger allgemeinen, aber wichtigen Form, auf die eben früher hingedeutet wurde:

$$(1a)\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\dfrac{d\Theta}{dr} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d\Gamma}{d\varphi} - \dfrac{dB}{dz}\right) + R_0 = \dfrac{d^2u}{dt^2} \\ \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\dfrac{d\Theta}{d\varphi} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{dA}{dz} - \dfrac{d\Gamma}{dr}\right) + \Phi_0 = \dfrac{d^2v}{dt^2} \\ \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\dfrac{d\Theta}{dz} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{drB}{dr} - \dfrac{1}{r}\dfrac{dA}{d\varphi}\right) + Z_0 = \dfrac{d^2w}{dt^2}, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$(3)\quad \begin{cases} A = \dfrac{dv}{dz} - \dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{d\varphi} \\ B = \dfrac{dw}{dr} - \dfrac{du}{dz} \\ \Gamma = \dfrac{1}{r}\dfrac{du}{d\varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{drv}{dr}. \end{cases}$$

Dies sind die von Lamé gegebenen Formeln.[1]) Hierzu kommen die Bedingungsgleichungen, die an der Oberfläche, also für $r = r_0$, $r = r_1$, und $z = 0$, $z = l$ erfüllt werden müssen.

[1]) Lamé, Leçons etc. § 77 und 78.

Sind R'_0, Φ'_0, Z'_0 und R''_0, Φ''_0, Z''_0, resp. die Componenten der auf den Mantel und die Endquerschnitte des Cylinders wirkenden Kräfte; ν'_1, ν'_2, ν'_3 und ν''_1, ν''_2, ν''_3 resp. die Richtungscosinus der Normale zur Oberfläche, so gelten für $r = r_0$ und $r = r_1$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} R'_0 &= R_1\nu'_1 + \Phi_1\nu'_2 + Z_1\nu'_3 \\ R_1 &= R_2\nu'_1 + \Phi_2\nu'_2 + Z_2\nu'_3 \\ Z_0 &= R_3\nu'_1 + \Phi_3\nu'_2 + Z_3\nu'_3 \end{aligned}$$

und ähnliche für $z = z_0$, $z = z_1$. Nun ist aber für den Mantel $\nu'_1 = \pm 1$, $\nu'_2 = 0$, $\nu'_3 = 0$, für die Endquerschnitte $\nu''_1 = 0$, $\nu''_2 = 0$, $\nu''_3 = \pm 1$. Also werden die Grenzbedingungen in der einfachen Form erhalten:

$$\text{(4a)} \quad \left\{ \begin{aligned} R'_0 &= \pm R_1 \\ \Phi'_0 &= \pm R_2 \\ Z'_0 &= \pm R_3 \end{aligned} \right\} \text{ für } r = r_0 \text{ und } r = r_1$$

und

$$\text{(4b)} \quad \left\{ \begin{aligned} R''_0 &= \pm Z_1 \\ \Phi''_0 &= \pm Z_2 \\ Z''_0 &= \pm Z_3 \end{aligned} \right\} \text{ für } z = 0,\ z = l_1 .$$

Die Gleichungen (1) und (4) vereinfachen sich aber wesentlich, da man von den äusseren Kräften ganz absehen kann, vorausgesetzt, dass dieselben von der Zeit unabhängig sind. Nur hat man dann die Schwingungen von der neuen Gleichgewichtslage auszurechnen, welche der Cylinder unter Einfluss dieser Kräfte annimmt.[1]) Unser Problem ist daher in zwei einfachere zerlegt, in die Bestimmung der Gleichgewichtslage unter Einfluss äusserer Kräfte und die Untersuchung der Schwingungen ohne Zutritt derselben. Das erste ist, wie in der Einleitung erwähnt wurde, von LAMÉ für die Kugel gelöst. Für den Cylinder wird die gleiche Methode anwendbar sein. Wir beschäftigen uns daher nur mit dem zweiten, setzen also in (1) und (4) die äusseren Kräfte = 0. Dann haben die Gleichungen (1a) die (pag. 2) angedeutete Form.

Es ist nun leicht zu zeigen, dass Θ nur von $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, die Functionen A, B, Γ nur von $\frac{\mu}{\rho}$ abhängen. Dazu differenziren

[1]) cf. CLEBSCH: Theorie der Elasticität fester Körper pag. 41.

wir die Gleichungen (1a) resp. nach r, φ, z nach Multiplication der ersten mit r. Wir erhalten durch Addition, wenn nach bekannter Bezeichnungsweise gesetzt wird:

$$\Delta^2. = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d.}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2.}{d\varphi^2} + \frac{d^2.}{dz^2},$$

zur Bestimmung von Θ die Gleichung:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\Delta^2\Theta.$$

Ferner differenziren wir je zwei der Gleichungen (1a) so, dass durch Subtraction derselben mit Rücksicht auf (3) resp. erscheint $\frac{d^2A}{dt^2}$, $\frac{d^2B}{dt^2}$, $\frac{d^2\Gamma}{dt^2}$. Wir erhalten folgende drei Gleichungen, in denen α, β, γ für den Augenblick bezeichnen resp. die Factoren von $\frac{\mu}{\rho}$ in (1a):

$$\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{d\varphi}\right) = \frac{d^2A}{dt^2}$$

$$\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{d\gamma}{dr} - \frac{d\alpha}{dz}\right) = \frac{d^2B}{dt^2}$$

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{1}{r}\left(\frac{d\alpha}{d\varphi} - \frac{dr\beta}{dr}\right) = \frac{d^2\Gamma}{dt^2}.$$

Die letzten 4 Gleichungen zeigen, dass Θ nur von $\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, die Functionen A, B, Γ nur von $\frac{\mu}{\rho}$ abhängen. Somit ist der (pag. 3) verlangte Nachweis gegeben.

Wir sind daher berechtigt die Verrückungen in zwei Theile zu zerlegen, von denen der eine nur von der longitudinalen Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$, der andere nur von der transversalen $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ abhängt. Und eben deshalb kann dann der eine Theil nur eine longitudinale, der andere nur eine transversale Schwingung vorstellen.

Die Bewegungsgleichungen eines elastischen homogenen Kreiscylinders zerfallen nun in folgende zwei Systeme und zwar in das für die

a) Longitudinalschwingungen:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \Omega^2 \frac{d\Theta}{dr}$$
$$r\frac{d^2v}{dt^2} = \Omega^2 \frac{d\Theta}{d\varphi}$$
$$\frac{d^2w}{dt^2} = \Omega^2 \frac{d\Theta}{dz},$$

wo $\Omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, mit den Bedingungsgleichungen, die für jeden Werth der unabhängigen Veränderlichen zu erfüllen sind:

$$0 = \frac{d\Gamma}{d\varphi} - \frac{drB}{dz}$$
$$0 = \frac{dA}{dz} - \frac{d\Gamma}{dr}$$
$$0 = \frac{drB}{dr} - \frac{dA}{d\varphi}$$

und mit den Oberflächenbedingungen (4a) und (4b):

b) Transversalschwingungen:

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} = \omega^2\left(\frac{1}{r}\frac{d\Gamma}{d\varphi} - \frac{dB}{dz}\right) \\ \frac{d^2v}{dt^2} = \omega^2\left(\frac{dA}{dz} - \frac{d\Gamma}{dr}\right) \\ \frac{d^2w}{dt^2} = \omega^2\left(\frac{1}{r}\frac{drB}{dr} - \frac{1}{r}\frac{dA}{d\varphi}\right) \end{cases}$$

$$(5a)\quad 0 = \frac{1}{r}\frac{dru}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{drv}{d\varphi} + \frac{dw}{dz}$$

mit den Oberflächenbedingungen (4a) und (4b); dabei ist $\omega^2 = \frac{\mu}{\rho}$, und die Gleichung (5a) ebenfalls für jeden Werth der unabhängigen Veränderlichen zu erfüllen.

Was die Gleichungen für longitudinale Schwingungen anbelangt, so sei nur bemerkt, dass ohne der Allgemeinheit zu schaden das zweite System mit Rücksicht auf (3) zu erfüllen ist durch $A = 0$, $B = 0$, $\Gamma = 0$. Wir gehen sogleich zur Integration der Gleichungen für die Transversalschwingungen über und erkennen zunächst, dass die Gleichung (5a) aus den Gleichungen (5) identisch hervorgeht.

Integration der Gleichungen für Transversalschwingungen eines Kreiscylinders.

Die particularen Integrale der Gleichungen (5) werden von der Form sein:

$$(6)\quad \begin{cases} u = \cos m\omega t \,.\, \xi_1 + \sin m\omega t \,.\, \xi_2 \\ rv = \cos m\omega t \,.\, \eta_1 + \sin m\omega t \,.\, \eta_2 \\ w = \cos m\omega t \,.\, \zeta_1 + \sin m\omega t \,.\, \zeta_2 ; \end{cases}$$

dem entsprechend setzen wir:

$$(6a)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = \cos m\omega t \; \mathrm{A}'_1 + \sin m\omega t \; \mathrm{A}'_2 \\ \mathrm{B} = \cos m\omega t \; \mathrm{B}'_1 + \sin m\omega t \; \mathrm{B}'_2 \\ \Gamma = \cos m\omega t \; \Gamma'_1 + \sin m\omega t \; \Gamma'_2 , \end{cases}$$

wo m eine vorläufig unbestimmte Constante, die ξ, η, ζ und demnach auch die A′, B′, Γ′ nur noch Functionen von r, φ, z bezeichnen. Führen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (5) und (3) ein, so lassen dieselben erkennen, dass sich ξ_1 und ξ_2 u. s. w., A'_1 und A'_2 u. s. w. nur durch die Werthe der Constanten unterscheiden können. Wir lassen daher die unteren Indices weg und verstehen unter ξ, η, ζ, A′, B′, Γ′ entweder die einen oder andern Functionen und erhalten zu ihrer Bestimmung die Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} -m^2\xi = \dfrac{1}{r}\dfrac{d\Gamma'}{d\varphi} - \dfrac{d\mathrm{B}'}{dz} \\ -m^2\eta = r\dfrac{d\mathrm{A}'}{dz} - r\dfrac{d\Gamma'}{dr} \\ -m^2\zeta = \dfrac{1}{r}\dfrac{dr\mathrm{B}'}{dr} - \dfrac{1}{r}\dfrac{d\mathrm{A}'}{d\varphi} \end{cases}$$

$$(7a)\quad 0 = \frac{1}{r}\frac{dr\xi}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d\eta}{d\varphi} + \frac{d\zeta}{dz}$$

$$(7b)\quad \begin{cases} \mathrm{A}' = \dfrac{1}{r}\dfrac{d\eta}{dz} - \dfrac{1}{r}\dfrac{d\zeta}{d\varphi} \\ \mathrm{B}' = \dfrac{d\zeta}{dr} - \dfrac{d\xi}{dz} \\ \Gamma' = \dfrac{1}{r}\dfrac{d\xi}{d\varphi} - \dfrac{d\eta}{dr} \end{cases}$$

Hierzu kommen die Grenzbedingungen, welche aus (4a) und (4b) entstehen, indem $\Theta = R'_0 = \Phi'_0 = Z'_0 = R''_0 = \Phi''_0 = Z''_0 = 0$ gesetzt wird:

$$(7c)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = \dfrac{d\xi}{dr} \\ 0 = \dfrac{1}{r}\dfrac{d\zeta}{d\varphi} + r\dfrac{d\frac{\eta}{r^2}}{dr} \\ 0 = \dfrac{d\zeta}{dr} + \dfrac{d\xi}{dz} \end{array}\right\} \text{ für } r = r_0 \text{ und } r = r_1$$

$$(7d)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = \dfrac{d\zeta}{dr} + \dfrac{d\xi}{dz} \\ 0 = \dfrac{d\eta}{dz} + \dfrac{d\zeta}{d\varphi} \\ 0 = \dfrac{d\zeta}{dz} \end{array}\right\} \text{ für } z = 0 \text{ und } z = l.$$

Offenbar werden die Functionen ξ, η, ζ sehr specieller Natur sein, da sie allen diesen Gleichungen genügen sollen. Um sie zunächst in ihrer allgemeinsten Form herzustellen, tragen wir die Ausdrücke für A', B', I'' in (7) ein und erhalten mit Rücksicht auf (7a) das Gleichungensystem;

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta^2(r\xi) + m^2 r\xi = -2\dfrac{d\zeta}{dz} \\ \nabla^2(\eta) + m^2\eta = -\dfrac{2}{r}\dfrac{d\zeta}{d\varphi} \\ \Delta^2(\zeta) + m^2\zeta = 0, \end{array}\right.$$

wo

$$(8a)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta^2(f) = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}r\dfrac{df}{dr} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d^2f}{d\varphi^2} + \dfrac{d^2f}{dz^2} \\ \nabla^2(f) = r\dfrac{d}{dr}\dfrac{1}{r}\dfrac{df}{dr} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d^2f}{d\varphi^2} + \dfrac{d^2f}{dz^2} \\ \qquad = \Delta^2(f) - \dfrac{2}{r}\dfrac{df}{dr}. \end{array}\right.$$

Die Gleichungen (8) zeigen, dass ξ, η, ζ in folgende Form zu setzen sind:

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi = \xi' + \xi'' \\ \eta = \eta' + \eta'' + \eta''' \\ \zeta = \zeta', \end{array}\right.$$

wo die ξ, η, ζ der rechten Seite so zu bestimmen sind, dass jedes der drei Werthsysteme $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$, $\zeta = \zeta'$; $\xi = \xi''$, $\eta = \eta''$, $\zeta = 0$; $\xi = 0$, $\eta = \eta'''$, $\zeta = 0$ für sich die Gleichungen

(8), sowie die Bedingungsgleichungen (7c) und (7d) erfüllt. Demnach erhalten zunächst die Functionen $r\xi'$, η', ζ' folgende Form:

$$(10)\quad \begin{cases} r\xi' = 2\,\mathfrak{R}''\Phi\dfrac{d\,Z}{dz} \\ \eta = 4\,\mathfrak{R}'''\dfrac{d\Phi}{d\varphi}\dfrac{dZ}{dz} \\ \zeta' = \mathfrak{R}'\Phi Z, \end{cases}$$

wenn $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$ nur Functionen von r, Φ und Z nur Functionen resp. von φ und z bedeuten. Zu ihrer Bestimmung dienen folgende Gleichungen, die sich aus (8) ohne Weiteres ergeben, und in welchen ν und n zwei vorläufig unbekannte Constanten sind:

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\,r\dfrac{d\mathfrak{R}'}{dr} + \left(m^2 - \nu^2 - \dfrac{n^2}{r^2}\right)\mathfrak{R}' = 0 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\,r\dfrac{d\mathfrak{R}''}{dr} + \left(m^2 - \nu^2 - \dfrac{n^2}{r^2}\right)\mathfrak{R}'' = -\,\mathfrak{R}' \\ r\dfrac{d}{dr}\dfrac{1}{r}\dfrac{d\mathfrak{R}'''}{dr} + \left(m^2 - \nu^2 - \dfrac{n^2}{r^2}\right)\mathfrak{R}''' = -\dfrac{\mathfrak{R}''}{r^2} \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2Z}{dz^2} + \nu^2 Z = 0 \\ \dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n^2\Phi = 0. \end{cases}$$

Nun gehen die Oberflächenbedingungen (7d), welche für $z = 0$ und $z = l$ zu erfüllen sind, über in:

$$(13)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{d\mathfrak{R}'}{dr}\,Z + \dfrac{2\mathfrak{R}''}{r}\dfrac{d^2Z}{dz^2} \\ 0 = 4\,\mathfrak{R}'''\dfrac{d^2Z}{dz^2} + \mathfrak{R}'Z \\ 0 = \dfrac{dZ}{dz}. \end{cases}$$

Da diese Gleichungen für jeden Werth von r und φ gelten, so sind resp. die Factoren Φ, $\dfrac{d\Phi}{d\varphi}$, $\mathfrak{R}'\Phi$ weggelassen.

Zwei Möglichkeiten sind vorhanden, den Gleichungen (13) durch (10) zu genügen.

Erstens müssten wegen (12) zwischen den Functionen $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$ die Relationen bestehen:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{R}''}{r} = \dfrac{1}{2\nu^2}\,\dfrac{d\mathfrak{R}'}{dr} \\ \mathfrak{R}''' = \dfrac{1}{4\nu^2}\,\mathfrak{R}'. \end{cases}$$

Werden diese Werthe für $\mathfrak{R}''$ und $\mathfrak{R}'''$ in die Gleichungen (11) eingetragen, so geht zwar die dritte in die Bestimmungsgleichung für $\mathfrak{R}'$ über; die zweite aber verlangt mit Rücksicht auf diese, dass für jeden Werth von r die Gleichung erfüllt werde:

$$(m^2 - 2\nu^2)\,\mathfrak{R}' = 0.\ ^{1})$$

Hieraus ist aber nicht auf $\mathfrak{R}' = 0$, d. h. auf $\xi' = \eta' = \zeta' = 0$, also noch nicht auf die Unzulässigkeit der Relationen (14) zu schliessen, da zwischen den Constanten m und ν die Beziehung bestehen könnte: $m^2 - 2\nu^2 = 0$. Würde dann ν der Bedingung $\left(\dfrac{dZ}{dz}\right)_{z=0,\,=l} = 0$ gemäss bestimmt, so wäre den Bedingungen (13) oder (7d) wirklich genügt. Es ist daher die Zulässigkeit der Relationen (14) weiter an den Bedingungsgleichungen (7c) zu prüfen, welche für $r = r_0$ und $r = r_1$ zu erfüllen sind. Diese gehen durch (10) mit Rücksicht auf (14) über in folgende Gleichungen:

$$0 = \frac{d^2\mathfrak{R}'}{dr^2}$$

$$0 = \frac{d\mathfrak{R}'}{dr} + r^2\,\frac{d\frac{\mathfrak{R}'}{r^2}}{dr}.$$

Die dritte der Gleichungen (7c) wird identisch erfüllt. Diese eben abgeleiteten Gleichungen verlangen aber in Verbindung mit der ersten von (11), dass $\mathfrak{R}'$ mit seinen sämmtlichen

---

[1]) Denn die zweite der Gleichungen (11) geht über in:

$$0 = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\,r\,\frac{d\mathfrak{R}'}{dr}\,r\,\frac{d\mathfrak{R}'}{dr} + \left(m^2 - \nu^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) r\,\frac{d\mathfrak{R}'}{dr} + 2\nu^2\mathfrak{R}'$$

und wegen der ersten in:

$$0 = -\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(\left(m^2 - \nu^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) r^2\mathfrak{R}'\right) + \left(m^2 - \nu^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) r\,\frac{d\mathfrak{R}'}{dr} + 2\nu^2\mathfrak{R}'$$

d. h. in: $\quad 0 = -2\mathfrak{R}'(m^2 - \nu^2) + 2\nu^2\mathfrak{R}'$

also in: $\quad 0 = (m^2 - 2\nu^2)\mathfrak{R}'.$

Ableitungen $\frac{d\mathfrak{R}'}{dr}, \frac{d^2\mathfrak{R}'}{dr^2}, \frac{d^3\mathfrak{R}'}{dr^3} \ldots$ für zwei constante Werthe der Variablen r verschwindet.

Dies ist nur möglich, wenn $\mathfrak{R}'$ für jeden Werth von r verschwindet.

Die Annahme der Relationen (14) führt also nothwendig auf $\mathfrak{R}' = 0$, also auch auf $\xi = \eta = \zeta = 0$.

Zweitens lassen sich die ersten beiden der Gleichungen (13) erfüllen, indem bestimmt wird, es soll für $z = 0$ und $z = l$

$$Z = \frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

sein. Da aber die dritte der Gleichungen (13) $\frac{dZ}{dz} = 0$ für $z = 0$, $z = l$ giebt, so folgt mit Rücksicht auf die erste Gleichung (12) jetzt für Z, wie vorhin für $\mathfrak{R}'$: Es soll Z mit seinen sämmtlichen Ableitungen $\frac{dZ}{dz}, \frac{d^2Z}{dz^2}, \frac{d^3Z}{dz^3} \ldots$ für zwei Werthe von z verschwinden, d. h. es ist $Z = 0$.

Hiermit ergiebt sich in beiden Fällen: Es verschwinden die Funtionen ξ', η', ζ'.

Wir haben nun das zweite Werthsystem $\xi = \xi'', \eta = \eta'', \zeta = 0$ in die Gleichungen einzuführen. Es ist aber leicht zu erkennen, dass $\xi'' = 0$ ist. Denn setzen wir in (7c) $\zeta = 0$, so soll ξ'' den zwei Bedingungsgleichungen

$$\frac{d\xi''}{dr} = 0, \qquad \frac{d\xi''}{dz} = 0$$

für $r = r_0$ und $r = r_1$ genügen. Ferner giebt die erste der Gleichungen (8) zur Bestimmung von ξ'' die Gleichung:

$$\Delta^2(r\xi'') + m^2 r\xi'' = 0.$$

Setzt man nun $r\xi'' = \mathfrak{R}\Phi Z$, wo $\mathfrak{R}$, Φ, Z die frühere Bedeutung haben, so müsste wieder eine Function $\mathfrak{R}'$ von r existiren, welche für zwei Werthe von r mit ihren sämmtlichen Ableitungen verschwindet.

Somit bleibt nur das dritte Werthsystem $\xi = 0, \eta = \eta'', \zeta = 0$ übrig. Und berücksichtigen wir, dass aus (7a)

$$\frac{d\eta''}{d\varphi} = 0$$

folgt, und dass die Componente v der Transversalverrückung

proportional η gesetzt wurde, so können wir das gewonnene Resultat so aussprechen:

> Die Transversalschwingungen eines endlichen Kreiscylinders bestehen nur in Torsionsschwingungen und sind von dem Winkel φ unabhängig.

Hiermit ist unser Problem auf die Bestimmung der Function η'' zurückgeführt, für die im Folgenden η geschrieben werden soll.

Bestimmung der Function η.

Setzt man in den Gleichungen (7a) bis (8) $\xi = 0$ und $\zeta = 0$ und berücksichtigt, dass η von φ unabhängig ist, so ergeben sich zur Bestimmung von η die Gleichungen:

$$r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dr} + m^2\eta + \frac{d^2\eta}{dz^2} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{d\frac{\eta}{r^2}}{dr} = 0 \text{ für } r = r_0 \text{ und } r = r_1 \tag{15a}$$

$$\frac{d\eta}{dz} = 0 \text{ für } z = 0 \text{ und } z = l. \tag{15b}$$

Daher wird η von der Form sein: $\Re(C\cos\nu z + D\sin\nu z)$. Der Bedingung (15b) wird genügt, indem man setzt

$$D = 0,\ \nu = \frac{\varkappa\pi}{l},\ \varkappa = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

$\Re$ genügt als Function von r der Gleichung

$$r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d\Re}{dr} + (m^2 - \nu^2)\Re = 0. \tag{16}$$

Ihre particularen Integrale, die mit ϑ^0, η^0 bezeichnet seien, stehen zu den Bessel'schen Functionen in den einfachen Beziehungen [1]):

$$\vartheta^0(x) = x \frac{dJ^0}{dx},\ \eta^0(x) = x \frac{dY^0}{dx}, \tag{17}$$

wo $x = kr$ und $k^2 = m^2 - \nu^2$.

---

[1]) Die Bessel'schen Functionen J^0, Y^0 genügen ja der Gleichung:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Dann wird der Bedingung (15a) genügt, indem man setzt:

(18) $$\Re = \vartheta^0 - j\,\eta^0, \quad \text{wo}$$

(18a) $$j = \left(\frac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}\right)_0 : \left(\frac{d\frac{\eta^0}{r^2}}{dr}\right)_0 = \left(\frac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}\right)_1 : \left(\frac{d\frac{\eta^0}{r^2}}{dr}\right)_1,$$

und zur Bestimmung von k^2 und somit auch von m^2 die transcendente Gleichung dient, welche man erhält, indem man die beiden Ausdrücke für j einander gleich setzt. Dabei bezeichnen die unteren Indices 0 und 1, dass in der Klammer r zu ersetzen ist resp. durch r_0 und r_1.

Eine singuläre Lösung der Gleichung (16) ist in (18) nicht enthalten, die aber von Bedeutung ist.

Für $m^2 = \nu^2$ nämlich nimmt (16) eine sehr einfache Gestalt an, so dass $\Re_{k=0} = ar^2 + b$ wird, wo a und b Constanten. Damit dieser Ausdruck der Bedingung (15a) genüge, muss $b = 0$ sein, also

(19) $$\Re_{k=0} = ar^2.$$

Um zu beweisen, dass (18) die Lösung (19) nicht enthält, sind die Werthe von ϑ^0, η^0, $\frac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}$, $\frac{d\frac{\eta^0}{r^2}}{dr}$ für $k = 0$ zu bestimmen.

Die Bessel'schen Functionen sind gegeben durch:

(20)
$$\begin{cases} J^0(x) = 1 - \frac{x^2}{2.2} + \frac{x^4}{2.4.2.4} - \frac{x^6}{2.4\,6.2.4.6} + \cdots \\ Y^0(x) = J^0(x)\log x + 2\left(\frac{1}{1}J^2(x) - \frac{1}{2}J^4(x) \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{1}{3}J^6(x) - \frac{1}{4}J^{(8)}x + \ldots\right)^{1)} \end{cases}$$

Die Reihenentwickelung für $J^0(x)$ zeigt mit Rücksicht auf (17), dass $\vartheta^0(rk)$ von der zweiten, $d\frac{\vartheta^0(rk)}{r^2}$ / dr von der vierten Ordnung unendlich klein für $k = 0$ sind. Ferner wird mit Rücksicht auf (17) und (20):

1) Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen pag. 42 und 44. (In dem Ausdrucke für $Y^0(x)$ ist das Glied $\alpha\, J^0(x)$, wo α eine Constante, weggelassen.)

$$\eta^0(x) = x \log x \frac{dJ^0(x)}{dx} + J^0(x) + 2x\left(\frac{1}{1}\frac{dJ^2(x)}{dx} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{dJ^4(x)}{dx} + \frac{1}{3}\frac{dJ^6(x)}{dx} - \ldots\right). \quad (21)$$

Berücksichtigt man die Relation: $\frac{dJ^\nu(x)}{dx} = \frac{\nu}{x} J^\nu(x) - J^{\nu+1}(x)$ [1]), und bemerkt, dass $J^\nu(x)$ sich von $J^0(x)$ sich wesentlich nur durch den Factor x^ν unterscheidet, also für $x = 0$ von der ν^{ten} Ordnung unendlich klein wird, und dass $(x \log x\ J(x))_{x=0} = 0$, so folgt, dass $\eta^0(kr)$ und $-\frac{d\frac{\eta^0(kr)}{r^2}}{dr}$ endlich bleiben für $k = 0$. Es verschwindet also $(\Re)_{k=0}$ und ist von der zweiten Ordnung unendlich klein. Es wird daher leicht sein, die singuläre Lösung (19) in den für η gewonnenen Ausdruck einzuführen, indem für $\Re$ gesetzt wird $\frac{\Re}{k^2}$. Denn zufolge der Reihenentwickelung (20) ergiebt sich wirklich $\left(\frac{\Re}{k^2}\right)_{k=0} = a'r^2$, wo a' eine Constante, $= -\frac{1}{2}$.

Wir erhalten somit folgenden Ausdruck für η:

$$\eta = \Sigma \frac{\Re}{k^2} \cos \nu z, \text{ wo } \nu = \frac{\varkappa\pi}{l}. \quad (22)$$

Es soll nun die Realität der Wurzeln k der transcendenten Gleichung (18a) erwiesen werden. Dass dieselben zunächst nicht complex imaginär sein können, folgt aus einer Integraleigenschaft der Functionen $\Re$, die zunächst abgeleitet werden soll. Seien k_n und $k_{n'}$ zwei verschiedene Wurzeln, $\Re_n$ und $\Re_{n'}$ die entsprechenden Werthe von $\Re$, so besteht zufolge (10) die Gleichung:

$$(k^2{}_n - k^2{}_{n'}) \int \frac{\Re_n \Re_{n'}}{r} dr = -\left[\frac{\Re_{n'}}{r}\frac{d\Re_n}{dr} - \frac{\Re_n}{r}\frac{d\Re_{n'}}{dr}\right];$$

und da wegen (15a) $\frac{d\Re}{dr} = \frac{2\Re}{r}$ für $r = r_0$ und $r = r_1$ ist:

[1]) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen pag. 8.

$$(23) \qquad (k^2{}_n - k^2{}_{n'}) \cdot \int_{r_0}^{r_1} \frac{\Re_n \, \Re_{n'}}{r} \, dr = 0,$$

und auch

$$(23a) \qquad \int \frac{\Re_n \, \Re_{n'}}{r} \, dr = 0, \text{ da } k_n, k_{n'} \text{ verschiedene}$$

Wurzeln sind.

Gäbe es nun eine complexe Wurzel von der Form $k_n = \alpha + i\beta$, so auch eine von der Form $k_{n'} = \alpha - i\beta$. Seien die entsprechenden Functionalwerthe $\Re_n = M + iN$, $\Re_{n'} = M - iN$, so wäre wegen (23):

$$4i\alpha\beta \int_{r_0}^{r_1} (M^2 + N^2) \frac{dr}{r} = 0.$$

Das Integral besteht aber aus lauter positiven Elementen und kann nicht verschwinden. Es muss also entweder $\beta = 0$ oder $\alpha = 0$ sein, d. h. die Wurzeln sind entweder reell oder rein imaginär.

Um nun zu beweisen, dass die Wurzeln auch nicht rein imaginär sind, leiten wir aus (10) folgende Gleichung ab:

$$k^2 = \frac{-\int_{r_0}^{r_1} \Re \, \frac{d}{dr} \, \frac{1}{r} \, \frac{d\Re}{dr} \, dr}{\int_{r_0}^{r_1} (\Re)^2 \, \frac{dr}{r}}$$

$$= \frac{-\left[\frac{1}{r} \, \Re \, \frac{d\Re}{dr}\right]_{r_0}^{r_1} + \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{d\Re}{dr}\right)^2 \frac{dr}{r}}{\int_{r_0}^{r_1} (\Re)^2 \, \frac{dr}{r}}$$

und wegen (15a)

$$(24) \qquad k^2 = \frac{\int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{d\Re}{dr}\right)^2 \frac{dr}{r} + 2\left(\frac{\Re}{r}\right)_0^2 - 2\left(\frac{\Re}{r}\right)_1^2}{\int_{r_0}^{r_1} (\Re)^2 \, \frac{dr}{r}}.$$

Zur Discussion dieses Ausdrucks ist zu beweisen, dass

$$\left(\frac{\Re}{r}\right)_0 > \left(\frac{\Re}{r}\right)_1.$$

Dazu dient folgendes Theorem:

$$(25) \qquad \vartheta^0(x)\,\frac{d\eta^0(x)}{dx} - \eta^0(x)\,\frac{d\vartheta^0(x)}{dx} = x.$$

Setzt man nämlich zur Ableitung desselben die linke Seite von (25) $= y$, so folgt aus Gleichung (10), der $\vartheta^0(x)$ und $\eta^0(x)$ für $x = kr$ genügen, zur Bestimmung von y die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0; \text{ also ist } y = cx.$$

Die Constante c bestimmt sich $= 1$ nach dem entsprechenden von Lommel [1]) für Bessel'schen Functionen abgeleiteten Theorem, in welches das obige zufolge der Relationen (17) übergeht.

Nun ist der Definition (18) nach

$$\frac{\Re}{r} = \frac{\dfrac{\vartheta^0}{r}\left(\dfrac{d\frac{\eta^0}{r^2}}{dr}\right)_0 - \dfrac{\eta^0}{r}\left(\dfrac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}\right)_0}{\dfrac{d\frac{\eta^0}{r^2}}{dr}};$$

folglich mit Rücksicht auf (25):

$$\left(\frac{\Re}{r}\right)_0 = \frac{k^2}{r_0^2\left(\dfrac{d\frac{\eta^0}{r^2}}{dr}\right)_0};$$

und ebenso folgt $\left(\dfrac{\Re}{r}\right)_1 = \dfrac{k^2}{r_1^2\left(\dfrac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}\right)_1}.$

1) Mathem. Annal. Bd. IV pag 106.

Folglich:

$$\frac{\left(\frac{\Re}{r}\right)_0}{\left(\frac{\Re}{r}\right)_1} = \frac{r_1^2\left(\frac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}\right)_1}{r_0^2\left(\frac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}\right)_0}$$

und wegen (18) auch $$= \frac{r_1^2\left(\frac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}\right)_1}{r_0^2\left(\frac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}\right)_0}.$$

Die Reihenentwickelung (20) für $J^0(x)$, sowie die daraus folgenden für die Differentialquotienten von J^0 sind convergent, also auch mit Rücksicht auf (17) folgende:

$$\frac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr} = k^4 r\left\{\frac{1}{2.4} - \frac{(kr)^2}{2^2.4.6} + \frac{(kr)^4}{2^3.4^2.6.8} - \cdots\right\}.$$

Diese Entwickelung zeigt, dass $\frac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}$ für ein rein imaginäres Argument eine mit demselben wachsende Function ist. Gäbe es nun eine imaginäre Wurzel k, so folgt hieraus, dass für diese jedenfalls, da r eine reelle, positive Grösse,

$$\left(\frac{\Re}{r}\right)_0 > \left(\frac{\Re}{r}\right)_1$$

ist; und es wäre somit in (24) das Quadrat einer rein imaginären Wurzel durch den Quotienten zweier positiven Grössen ausgedrückt, was unmöglich ist.

Es sind daher sämmtliche Wurzeln k der transcendenten Gleichung reell, also auch die Grössen $m = \pm\sqrt{\nu^2 + k^2}$, wo ν als reelle Zahl bestimmt war. Zugleich geht hervor, dass $m = \nu$ absolut genommen der kleinste Werth ist, den die Constante m annehmen kann.

Es sind noch die Anfangsbedingungen zu berücksichtigen. Dazu führen wir den Werth (22) für η in (6) ein, lassen $\frac{1}{k^2}$ in die Constanten eingehen und summiren über alle Wurzeln k und über alle ganzen Zahlen $\varkappa$. Bezeichnen wir noch die Wurzeln k der transcendenten Gleichung, der Grösse nach

geordnet, mit k_0, k_1, k_2. . . . k_n . . . , so dass $k_0 = 0$ ist, versehen $\mathfrak{R}$ und m mit Indices, schreiben also $\mathfrak{R}_n$, $m^2{}_{\varkappa n} = \frac{\varkappa^2\pi^2}{l^2} + k^2{}_n$ (cf. pag. 14), um anzudeuten, dass $\mathfrak{R}$ von den Wurzeln k_n, m von $\varkappa$ und k_n abhängen; so erhalten wir als Ausdruck für v:

$$(26) \qquad v = \frac{1}{r} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ A_{\varkappa n} \cos m_{\varkappa n}\, \omega t + B_{\varkappa n} \sin m_{\varkappa n}\, \omega t \right\} \mathfrak{R}_n \cos \frac{\varkappa \pi}{l} z.$$

Bezeichnen nun v_1 und v_2 zwei Functionen von r und z, die innerhalb der Grenzen r_0 bis r_1 und 0 bis l endlich sind, so möge v den Anfangsbedingungen unterworfen sein:

$$(27) \qquad \left\{ \begin{matrix} v &= v_1 \\ \frac{dv}{dt} &= v_2 \end{matrix} \right\} \text{ für } t = 0.$$

Zufolge des Integralsatzes (23a) lässt sich nun jede innerhalb r_0 bis r_1 endliche Function nach den $\mathfrak{R}_n$ entwickeln; also

$$rv_1 = \sum_n \mathrm{A}_n \mathfrak{R}_n, \text{ wo } \mathrm{A}_n = \frac{\int_{r_0}^{r_1} v_1 \mathfrak{R}_n \, dr}{\int_{r_0}^{r_1} \frac{(\mathfrak{R}_n)^2}{r} dr}.$$

Die Coëfficienten A_n sind als Functionen von z nach $\cos \frac{\varkappa\pi}{l} z$ zu entwickeln, also wird sein

$$\mathrm{A}_n = \sum_\varkappa \alpha_{\varkappa n} \cos \frac{\varkappa\pi}{l} z, \text{ wo}$$

$$\alpha_{\varkappa n} = \frac{\varepsilon_\varkappa}{l} \frac{\int_{r_0}^{r_1} \mathfrak{R}_n \, dr \int_0^l v_1 \cos \frac{\varkappa\pi}{l} z \, dz}{\int_{r_0}^{r_1} \frac{(\mathfrak{R}_n)^2}{r} dr}$$

und $\varepsilon_\varkappa = 2$ für $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots$, dagegen $= 1$ für $\varkappa = 0$. Es ergiebt sich somit für rv_1 die Entwickelung

$$(28)\quad \begin{cases} rv_1 = \sum\sum \alpha_{\varkappa n}\, \mathfrak{R}_n \cos \dfrac{\varkappa\pi}{l}\, z \text{ und ebenso} \\ rv_2 = \sum\sum \beta_{\varkappa n}\, \mathfrak{R}_n \cos \dfrac{\varkappa\pi}{l}\, z. \end{cases}$$

Es geht α in β über, wenn im Ausdrucke für $\alpha\, v_1$ durch v_2 ersetzt wird.

Setzen wir nun $t = 0$ im Ausdrucke (26) für v und ebenso in dem daraus hervorgehenden für $\dfrac{dv}{dt}$, so ergiebt der Vergleich der entsprechenden Formeln mit (28) für die Coëfficienten die Bestimmung:

$$A_{\varkappa n} = \alpha_{\varkappa n}$$

$$B_{\varkappa n} = \frac{\beta_{\varkappa n}}{m_{\varkappa n}\,\omega}.$$

Anwendung auf den Vollcylinder.

Die entsprechenden Formeln für den Vollcylinder lassen sich ohne Weiteres aus den vorhergehenden ableiten, wenn man zur Grenze für $r_0 = 0$ übergeht. Es war $\mathfrak{R} = \vartheta^0 - j\,\eta^0$, und j konnten wir nach (18a) setzen

$$j = \frac{\left(\dfrac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}\right)_0}{\left(\dfrac{d\frac{\eta^0}{r^2}}{dr}\right)_0}.$$

Nun bleibt zwar η, wie die Entwickelung (21) zeigt, für $r = 0$ endlich, aber $\dfrac{d\frac{\eta^0}{r^2}}{dr}$ wird unendlich gross; und da wegen (17) und (20) ϑ^0 sowie $\dfrac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}$ für $r = 0$ endlich bleiben, so verschwindet j für $r_0 = 0$. Es wird daher für den Vollcylinder

$$\mathfrak{R} = \vartheta^0,$$

und die transcendente Gleichung geht über in: $\left(\dfrac{d\frac{\vartheta^0}{r^2}}{dr}\right)_0 = 0.$

Der Schwingungszustand eines Kreiscylinders.

Zur Betrachtung des Schwingungszustandes wird es vortheilhaft sein in dem Ausdrucke (26) für η die Glieder abzutrennen, welche den kleinsten Werthen m entsprechen, d. h. für $n = 0$ und $\varkappa = 0$. Es geht aber (cf. pag. 15) $A_{\varkappa n}\,\mathfrak{R}_n$ und $B_{\varkappa n}\,\mathfrak{R}_n$ resp. über für $n = 0$ in $a_\varkappa r^2$ und $b_\varkappa r^2$, wo a und b leicht bestimmbare Constante sind. Und da allgemein $m^2{}_{\varkappa n} = \frac{\varkappa^2\pi^2}{l^2} + k^2 n$, so können wir setzen:

$$v = v' + v'' + v''', \quad \text{wo}$$

$$v' = r \sum_{\varkappa} \left\{ a_\varkappa \cos \frac{\varkappa\pi}{l}\,\omega t \pm b_\varkappa \sin \frac{\varkappa\pi}{l}\,\omega t \right\} \cos \frac{\varkappa\pi}{l} z$$

$$v'' = \sum_{n} \left\{ A_{0n} \cos k_n \omega t \pm B_{0n} \sin k\ \omega t \right\} \mathfrak{R}_n$$

$$v''' = \sum_{\varkappa=1} \sum_{n=1} \left\{ A_{\varkappa n} \cos m_{\varkappa n} \omega t \pm B_{\varkappa n} \sin m_{\varkappa n} \omega t \right\} \mathfrak{R}_n \cos \frac{\varkappa\pi}{l} z.$$

Die Discussion dieser Ausdrücke ist in der gewöhnlichen Weise zu führen. Wir fassen zugleich die gewonnenen Resultate zusammen.

Erleiden die Theile eines homogenen, elastischen Kreiscylinder von endlicher Ausdehnung irgend welche Verrückung, so gerathen dieselben in periodische Schwingungen. Jede Verrückung resultirt aus einer longitudinalen und einer transversalen. Von letzterer verschwinden zufolge der Oberflächenbedingungen die Componenten nach dem Radius und der Axe des Cylinders Die Transversalverschiebung ist ferner vom Winkel φ unabhängig, d. h. sie ist die gleiche für alle Theilchen eines Querschnittes, welche von der Cylinderaxe gleich weit abstehen. Dies ist die in der Experimentalphysik gemachte Annahme über die Torsionsbewegung eines endlichen Kreiscylinders.

Der Cylinder ist bei seiner Torsionsbewegung unendlich vieler Schwingungszustände fähig, entsprechend je einem Werthepaare der Constanten $\varkappa$ und n. Jeder derselben wird charakterisirt durch eine sog. Schwingungszahl und durch gewisse Knotenflächen. Für eine Schwingung allgemeinster Art, gegeben durch v'', sind die Schwingungszahlen

$\frac{m_{\varkappa n}\omega}{2\pi}$, wo $m^2_{\varkappa n} = \frac{\varkappa^2\pi^2}{l^2} + k^2_n$ und $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots n = 1, 2, 3 \ldots$, direct proportional der Fortflanzungsgeschwindigkeit ω und abhängig von den Dimensionen des Cylinders. Es treten zweierlei Knotenflächen auf. Die einen sind von den Wurzeln der transcendenten Gleichung unabhängig und zwar die Querschnitte für

$$z = \frac{1l}{2\varkappa}, \frac{3l}{2\varkappa}, \frac{5l}{2\varkappa} \cdots \frac{(2\varkappa-1)l}{2\varkappa}.$$

Es theilt sich also der Cylinder in $\varkappa$ gleiche Theile, deren jeder für sich schwingt. Die anderen sind concentrische Kreiscylinderflächen, deren Radien aus der Gleichung

$$\Re_n = 0$$

zu berechnen sind. Beim Vollcylinder gehört zu diesen auch die Cylinderaxe.

Von grösserer Wichtigkeit sind zwei besondere Arten von Schwingungen. Sie entsprechen einander gegenseitig und sind durch die kleinsten Schwingungszahlen charakterisirt. Sie enthalten daher die Grundtöne, welche der Cylinder anzugeben im Stande ist, sofern man von Tönen sprechen will, die durch Torsionsschwingungen erzeugt werden. Die Dimensionen des Cylinders sind zwar auf sie von Einfluss, doch so, dass die eine Art nur von der Dicke, die andere nur von der Länge der Cylinderschale abhängt. Die eine Art ist gegeben durch v'. Die Verrückung eines Theilchens ist daher seiner Entfernung von der Cylinderaxe proportional. Die Schwingungszahlen

$$\frac{1\omega}{2l}, \frac{2\omega}{2l}, \frac{3\omega}{2l}, \frac{4\omega}{2l} \cdots \frac{\varkappa\omega}{2l} \cdots$$

sind der Fortpflanzungsgeschwindigkeit direct, der Länge l umgekehrt proportional. Von den Knotenflächen treten nur die ersteren auf.

Die Schwingungen der anderen Art sind gegeben durch v''. Es erleiden also alle Theilchen, welche auf Geraden liegen, die der Cylinderaxe parallel sind, die gleiche Verrückung. Ihre Schwingungszahlen

$$\frac{k_1\omega}{2\pi}, \frac{k_2\omega}{2\pi}, \frac{k_3\omega}{2\pi} \cdots \frac{k_n\omega}{2\pi} \cdots$$

sind abhängig von den Wurzeln der transcendenten Gleichung und proportionel ω. Knotenflächen bilden allein die bezeichneten Querschnitte.

II.

Transversalschwingungen einer elastischen, homogenen Kugelschale von endlicher Dicke.

Das Problem der Transversalschwingnngen einer Kugelschale weicht in seiner Behandlung nur unwesentlich von dem vorhergehenden ab, besonders was die Ableitung der demselben zugehörigen Differentialgleichungen aus den allgemeinen, von LAMÉ in Kugelcoordinaten transformirten Gleichungen der Elasticitätstheorie betrifft. Doch einige Eigenthümlichkeiten, die dasselbe auszeichnen, rechtfertigen seine Behandlung neben dem vorhergehenden. Nur können wir uns kurz fassen und alles beiden Problemen Gemeinsame bloss andeuten.

Sind r, φ, ψ die Kugelcoordinaten, wo r den Radiusvector, φ den Winkel desselben mit der Aequatorebene der Kugel, ψ den Winkel der durch r gelegten Meridianebene mit einer festen bezeichnet; sind ferner u, v, w die Componenten einer Transversalverrückung und zwar u nach der Richtung von r, v nach der Richtung der Tangente parallel der Aequatorebene; bezeichnet wiederum $\omega^2 = \frac{\mu}{\rho}$ das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer transversalen Welle, und wird noch zur Abkürzung gesetzt $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$; — so zeigen die LAMÉ'schen Gleichungen [1]), dass man, wenn ξ, η, ζ Functionen von r, φ, ψ sind, zu setzen hat:

$$(1)\quad \begin{cases} u = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\omega t\,\xi \\ rv = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\omega t\,\eta \\ crw = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\omega t\,\zeta, \end{cases}$$

und dass zur Bestimmung von ξ, η, ζ die Gleichungen dienen:

$$(2)\quad \begin{cases} -m^2\xi = \dfrac{1}{cr^2}\left(\dfrac{d\Gamma'}{d\varphi} - \dfrac{dB'}{d\psi}\right) \\ -m^2\eta = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{dA'}{d\psi} - \dfrac{d\Gamma'}{dr}\right) \\ -m^2\zeta = c\left(\dfrac{dB'}{dr} - \dfrac{dA'}{d\varphi}\right) \end{cases}$$

[1]) LAMÉ, Leçons . . . pag. 199 und 200.

$$(2a) \qquad 0 = \frac{dr^2\xi}{dr} + \frac{1}{c}\frac{dc\eta}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d\zeta}{d\psi},$$

wo

$$(2b) \quad \begin{cases} A' = \dfrac{1}{cr^2}\left(\dfrac{d\eta}{d\psi} - \dfrac{d\zeta}{d\varphi}\right) \\ B' = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{d\zeta}{dr} - \dfrac{d\xi}{d\psi}\right) \\ \Gamma' = c\left(\dfrac{d\xi}{d\varphi} - \dfrac{d\eta}{dr}\right); \end{cases}$$

dabei ist vorausgesetzt, dass auf das Innere der Kugel keine äusseren Kräfte wirken. Auch für die Oberfläche machen wir diese Annahme. Dann haben die Functionen ξ, η, ζ den Grenzbedingungen für $r = r_0$ und $r = r_1$ zu genügen:

$$(2c) \quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dr} = 0 \\ \dfrac{d\xi}{dr} + r^2\dfrac{d\frac{\eta}{r^2}}{dr} = 0 \\ \dfrac{d\xi}{d\psi} + r^2\dfrac{d\frac{\zeta}{r^2}}{dr} = 0. \end{cases}$$

Trägt man die Werthe (2b) für A', B', Γ' in (2) ein, so erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (2a), welche aussagt, dass das Volumenelement bei Transversalschwingungen unverändert bleibt, das neue Gleichungensystem:

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta^2(r^2\xi) + m^2r^2\xi - \dfrac{2}{r}\dfrac{dr^2\xi}{dr} = 0 \\ \Delta^2(c\eta) + m^2c\eta - \dfrac{2}{r}\dfrac{dc\eta}{dr} = -\dfrac{2c}{r}\dfrac{d\xi}{d\varphi} + \dfrac{2s}{r^2}\dfrac{dr^2\xi}{dr} \\ \nabla^2(\zeta) + m^2\zeta - \dfrac{2}{r}\dfrac{d\zeta}{dr} = -\dfrac{2}{r}\dfrac{d\xi}{d\psi} + \dfrac{2s}{r^2c^2}\dfrac{dc\eta}{d\psi} \end{cases}$$

wo

$$(3a) \quad \begin{cases} \Delta^2(f) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}r^2\dfrac{df}{dr} + \dfrac{1}{r^2c}\dfrac{d}{d\varphi}c\dfrac{df}{d\varphi} + \dfrac{1}{r^2c^2}\dfrac{d^2f}{d\psi^2} \\ \nabla^2(f) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}r^2\dfrac{df}{dr} + \dfrac{c}{r^2}\dfrac{d}{d\varphi}\dfrac{1}{c}\dfrac{df}{d\varphi} + \dfrac{1}{r^2c^2}\dfrac{d^2f}{d\psi^2} \\ \qquad = \Delta^2(f) + \dfrac{2s}{r^2c}\dfrac{df}{d\varphi}. \end{cases}$$

Es liegt nun nahe, auch bei diesem Probleme vor Herstellung der Functionen ξ, η, ζ zu untersuchen, ob durch sie

den Oberflächenbedingungen genügt werden kann. Aber der frühere Weg kann hier nicht befolgt werden, da wohl die erste Gleichung (3) das allgemeine Bildungsgesetz für die Function ξ erkennen lässt, nicht aber ohne erhebliche Rechnungen die zweite und dritte das für η und ζ. Indessen leistet hier die sog. Continuitätsgleichung (2a) das Erforderliche, so dass wirklich nur die Bildung der Function ξ hinreicht.

Es sind also die Oberflächenbedingen in (2a) einzuführen. Dazu differenziren wir (2a) nach Division durch r^2 nach r. Wir erhalten folgende Gleichung mit Rücksicht auf die zweite und dritte Gleichung (2c):

$$0 = \frac{d}{dr}\frac{1}{r^2}\frac{dr^2\xi}{dr} + \frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{d\frac{\eta}{r^2}}{dr} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2\frac{\zeta}{r^2}}{d\psi\, dr}$$

und mit Rücksicht auf die erste Gleichung (3) und die erste (2c):

$$(4) \qquad 0 = 2\frac{d^2r^2\xi}{dr} + \left(m^2 - \frac{4}{r^2}\right) r^2\xi.$$

Diese Gleichung ist also gleichfalls für $r = r_0$ und $r = r_1$ zu erfüllen und kann als Bedingung aufgefasst werden, dass das Medium die Eigenschaft auch an der Oberfläche beibehält, nach welcher das Volumenelement bei Transversalschwingungen nicht verändert wird.

Nun hat der allgemeine Ausdruck für $r^2\xi$ der ersten Gleichung (3) nach die Form:

$$(5) \qquad r^2\xi = R.S,$$

wo R als Function von r und S als Function von φ und ψ durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2R}{dr^2} + \left(m^3 - \dfrac{n(n+1)}{r^2}\right) R = 0, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{d}{d\varphi}c\dfrac{dS}{d\varphi} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2S}{d\psi^2} + n(n+1)\,S = 0. \end{cases}$$

Da aber die Oberflächenbedingungen für jeden Werth von φ und ψ zu erfüllen sind, so verlangen die erste Gleichung

(2c), sowie die eben abgeleitete (4), dass R für $r = r_0$ und $r = r_1$ den beiden Gleichungen genüge:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d\frac{R}{r^2}}{dr} = 0 \\ \left(m^2 - 2\dfrac{n(n+1)-2}{r^2}\right) R = 0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen sind mit einander unverträglich und verlangen, dass $R = 0$ und daher $\xi = 0$ ist. Denn die zweite Gleichung kann nur erfüllt werden, indem entweder der erste oder der zweite Factor für einen der Werthe r_0 und r_1 verschwinden gelassen wird. Setzen wir nun z. B.

$$m^2 - 2\frac{n(n+1)-2}{r_0^2} = 0,$$

so folgt nothwendig $R_{r=r_1} = 0$. Der ersten Gleichung (7) nach verschwindet aber dann auch $\left(\frac{dR}{dr}\right)_{r=r_1}$, und mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung von R müsste eine Function von r existiren, welche für $r = r_1$ und dann auch für $r = r_0$ mit allen ihren Differentialquotienten verschwindet, was unmöglich ist.

Durch das gewonnene Resultat vereinfachen sich unsere Gleichungen wesentlich. Die Gleichung (3) für $c\,\eta$ nimmt die Form der Gleichung für $r^2\,\xi$ an. Die Schwierigkeiten, welche noch die dritte Gleichung (3) zu machen scheint, sind leicht gehoben, wenn man auf die einfache Beziehung zwischen η und ζ Rücksicht nimmt, welche nun durch die Continuitätsgleichung (2a) gegeben wird. Diese geht nämlich über in:

$$(8)\qquad 0 = c\frac{dc\eta}{d\varphi} + \frac{d\zeta}{d\psi}$$

und zeigt, dass η und ζ in Beziehung auf die Veränderliche r gleichwerthig sind.

Behalten R und S ihre frühere Bedeutung, definirt durch (6), bezeichnet s eine Function von φ allein, so werden (8) zufolge $c\,\eta$ und ζ die Ausdrücke erhalten:

$$(9)\quad \begin{cases} c\eta = R\,\dfrac{dS}{d\psi} \\ \zeta = -Rc\,\dfrac{dS}{d\varphi} + R.\sigma, \end{cases}^{1})$$

welche zugleich die zweite und dritte Gleichung (3) befriedigen, sobald σ durch die Gleichung bestimmt wird

$$(10)\qquad c\,\frac{d}{d\varphi}\,\frac{1}{c}\,\frac{d\sigma}{d\varphi} + n\,(n+1)\,\sigma = 0.$$

Den Oberflächenbedingungen gemäss hat R für $r = r_0$ und $r = r_1$ der Gleichung zu genügen:

$$(11)\qquad d\,\frac{\frac{R}{r^2}}{dr} = 0.$$

Somit ist das Problem gelöst bis auf die Bestimmung der Functionen R, S, σ und der darin enthaltenen Constanten. Die Gleichung (6) für S ist die Definitionsgleichung für die von zwei Veränderlichen φ und ψ abhängenden Kugelfunctionen. Es wird daher sein:

$$(12)\qquad S = \sum_{n=0}^{n=\infty}\ \sum_{\nu=0}^{\nu=n} P_\nu^n \left\{ \mathfrak{g}_\nu^n \cos\nu\psi + \mathfrak{g}_\nu'^{n} \sin\nu\psi \right\},^{2})$$

wo die Grössen $\mathfrak{g}$ Constanten sind, und P_ν^n die eine verwerthbare Lösung von folgender Gleichung ist, wenn noch, um dieselbe in gewöhnlicher Form zu erhalten $\varphi = \vartheta - \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta\,\frac{df}{d\vartheta} + \left(n(n+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2\vartheta}\right) f = 0.$$

Für P_ν^n hat man die Entwickelung:

$$(13)\quad P_\nu^n = \sin^\nu\vartheta \left\{ \cos^{n-\nu}\vartheta - \frac{(n-\nu)\ (n-\nu-1)}{2.(2n-1)}\cos^{n-\nu-2}\vartheta + \frac{(n-\nu)\ (n-\nu-1)\ (n-\nu-2)\ (n-\nu-3)}{2.4.(2n-1)\ (2n-3)}\cos^{n-\nu-4}\vartheta - \ldots \right\},^{3})$$

welche unter der Voraussetzung gilt, dass $\nu^2 \leqq n^2$.

---

1) Dass nicht auch zu dem Ausdrucke für $c\eta$ ein Glied $= R$mal einer Function von ψ allein hinzutreten darf, erkennt man, wenn die Ausdrücke (9) in (3) eingeführt werden. Uebrigens wird sich bald zeigen, dass auch das Glied $R.\sigma$ entbehrt werden kann, nämlich im ersten enthalten ist.

2) Heine, Handbuch der Kugelfunction, II. Theil.

3) Heine, Handbuch . . . pag. 117 (34a).

Die Integrale der σ definirenden Gleichung (10) stehen zu den nur von einer Veränderlichen abhängigen Kugelfunctionen in einfacher Beziehung.[1]) Sei das eine hier gültige Integral Θ^n, so ist

$$\Theta^n = c \frac{dP^n}{d\varphi},$$

wo P^n der Gleichung genügt:

$$\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi} c \frac{dP^n}{d\varphi} + n(n+1) P^n = 0.$$

Es ist also zu setzen $\sigma = C\Theta^n = C.c\frac{dP^n}{d\varphi}$, wo C eine Constante. Da nun P^n bis auf einen constanten Factor $= P_0^n$ ist, so lässt der Ausdruck für ζ erkennen, dass das erste Glied das zweite als singuläre Lösung enthält. Wir können daher einfach setzen

$$\zeta = -Rc\frac{dS}{d\varphi}. \tag{14}$$

Die Bestimmungsgleichung (6) für R geht über, $mr = x$ gesetzt, in die Gleichung:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) R = 0. \tag{15}$$

Ihre particularen Integrale g^n und h^n sind gegeben durch die Reihen:

$$(16)\begin{cases} g^n = x^{n+1}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+3)} + \frac{x^4}{2.4.(2n+3)(2n+5)} \right. \\ \qquad \left. - \frac{x^6}{2.4.6.(2n+3)(2n+5)(2n+7)} + \cdots\right\} \\ h^n = x^{-n}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n-1)} + \frac{x^4}{2.4.(2n-1)(2n-3)} \right. \\ \qquad \left. + \frac{x^6}{2.4.6(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \cdots\right\}.^2) \end{cases}$$

[1]) Diese Beziehung hat Herr O. E. Meyer in seiner Abhandlung „Ueber die Bewegung einer Pendelkugel in der Luft", Crelle's Journal, Band 75, nachgewiesen. — Reihenentwickelungen für die der Gleichung (10) genügenden Functionen giebt Herr Lübeck in seiner Dissert. Crelle's Journal, Band 77, woselbst er die Integralbeziehung ableitet: $\int_0^\pi \frac{\Theta^n \Theta^{n'}}{\sin\vartheta} = 0 \quad n \lesseqgtr n'$. cf. III.

[2]) Beziehungen zwischen den Functionen g für aufeinander folgende Werthe von n leitet Herr Lübeck in seiner Dissert. ab. — Mit andern, als den hier ge-

Die Functionen g^n und h^n sind durch eine wichtige Beziehung mit einander verbunden, ähnlich der erwähnten zwischen den BESSEL'schen Functionen. Dieselbe wird wieder mit zum Beweise der Realität der Wurzeln der auftretenden transcendenten Gleichung dienen. Es ist:

$$(17) \qquad g\frac{dh}{dx} - h\frac{dg}{dx} = -(2n+1)$$

Zunächst folgt nämlich aus (15):

$$g\frac{dh}{dx} - h\frac{dg}{dx} = \text{const.}$$

Setzt man aber $g = x^{n+1}\omega_1$, $h = x^{-n}\omega_2$, so folgt:

$$g\frac{dh}{dx} - h\frac{dg}{dx} = x\left(\omega_1\frac{d\omega_2}{dx} - \omega_2\frac{d\omega_1}{dx}\right) - (2n+1)\omega_1\omega_2$$

daraus folgt mit Rücksicht auf die Entwickelungen für ω_1 und ω_2, dass

$$\text{const.} = -(2n+1).$$

Es ist R von der Form:

$$R = g^n - j\,h^n,$$

wo wegen (11) die Constante

$$j = \left(\frac{d\frac{g^n}{r^2}}{dr}\right)_0 : \left(\frac{d\frac{h^n}{r^2}}{dr}\right)_0 = \left(\frac{d\frac{g^n}{r^2}}{dr}\right)_1 : \left(\frac{d\frac{h^n}{r^2}}{dr}\right)_1.$$

Die unteren Indices 0 und 1 haben die frühere Bedeutung. Die beiden Werthe für j, einander gleich gesetzt, geben zur Bestimmung von m eine transcendente Gleichung. Die Realität ihrer Wurzeln folgt aus ähnlichen Schlüssen, wie früher. Dass dieselben nicht complex imaginär sind, geht aus folgendem, aus (15) mit Rücksicht auf (11) leicht abzuleitenden Integralsatze

$$\int_{r_0}^{r_1} R_m R_{m'}\,dr = 0$$

---

wählten Functionen (16) giebt Herr LAMPE die Lösung der Differentialgleichung (15) in seiner Abhandlung: „Ueber die Bewegung einer Kugel, welche in einer reibenden Flüssigkeit um einen senkrechten Durchmesser als feststehende Axe rotirend schwingt", Programm des städt. Gymn. zu Danzig 1866.

hervor, wo m und m' zwei verschiedene Wurzeln sind. Und dass die Wurzeln auch nicht rein imaginär sind, ist durch ein ganz ähnliches Verfahren wie in I zu erweisen auf Grund des Theorems (17).

Schliesslich tragen wir die für ξ, η, ζ gewonnenen Ausdrücke in (1) ein und erhalten für die Componenten einer transversalen Verrückung folgende Ausdrücke:

$$(20)\quad \begin{cases} u = 0 \\ v = \dfrac{1}{rc} \sum\limits_m \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} R_m^n P_\nu^n \left(\cos m\omega t \dfrac{d\Psi_\nu^n}{d\psi} + \sin m\omega t \dfrac{d\Psi_\nu'^n}{d\psi} \right) \\ w = -\dfrac{1}{rc} \sum\limits_m \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty} R_m^n c \dfrac{dP_\nu^n}{d\varphi} \left(\cos m\omega t \, \Psi_\nu^n + \sin m\omega t \Psi_\nu'^n \right), \end{cases}$$

wo

$$\Psi_\nu^n = A_\nu^n \cos \nu\psi + B_\nu^n \sin \nu\psi$$

$$\Psi_\nu'^n = C_\nu^n \cos \nu\psi + D_\nu^n \sin \nu\psi.$$ [1])

Die Bestimmung der Constanten A, B, C, D durch die Anfangsbedingungen, die zur vollständigen Lösung des Problems nothwendig ist, soll nicht gegeben werden, da sie der entsprechenden im ersten Theil ganz analog ist. Man hat nur in Erwägung zu ziehen, dass sich zufolge des Integralsatzes (19) jede innerhalb r_0 bis r_1 endliche Functionen von r nach den Functionen R_m, und dass sich, wie bekannt, jede innerhalb gewisser Argumentwerthe endliche Function von φ und ψ in eine Reihe von der Form

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (\mathfrak{A}_\nu^n \cos \nu\psi + \mathfrak{B}_\nu^n \sin \nu\psi),$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Constante, entwickeln lässt.

Wir geben nur noch eine kurze Deutung der Formeln (20).

Während die Transversalschwingungen eines Cylinders nur in Torsionsschwingungen bestehen, verschwindet hier allein die Componente nach der Richtung des Radius. Auch ist nicht jede Torsionsschwingung der Kugel vom Torsions-

[1]) Die entsprechenden Formeln für die Vollkugel unterscheiden sich von den obigen nur dadurch, dass R_m^n durch g_m^n ersetzt ist, und dass die Summation über n mit $n = 1$ zu beginnen hat.

winkel unabhängig, obwohl die Kugel durch passend gewählte Anfangsverrückungen in Schwingungen reiner Torsion versetzt werden kann, entsprechend dem Werthe der Constanten $\nu = 0$.

Als Knotenflächen werden im Allgemeinen nur concentrische Kugelflächen auftreten, deren Radien aus der Gleichung $R_m^n = 0$ zu berechnen sind. Doch werden beim eben genannten Zustande, wo also alle Theilchen der Kugel reine Torsionsschwingungen ausführen, noch Knotenflächen anderer Art vorhanden sein. Alle Theilchen nämlich nehmen an der Bewegung nicht Theil, welche auf Kreiskegelflächen liegen, deren gemeinsame Spitze und Axe resp. mit dem Mittelpunkt und der Axe der Kugel zusammen fallen, und deren Erzeugungswinkel φ als Wurzeln der Gleichung

$$\frac{d P_\nu^n}{d\varphi} = 0$$

gegeben sind.

III.

Zwei den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Functionen.

Die Gleichungen $\Delta.^2 = 0$ und $\nabla.^2 = 0$ [1]) veranlassen zur Betrachtung je zweier Klassen von Functionen, wenn in dieselben Kugel- und Cylindercoordinaten eingeführt werden. Und zwar führt $\Delta^2 = 0$ auf die bekannten Kugel- und Cylinderfunctionen, welche definirt werden durch die Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta\frac{dP}{d\vartheta} + \left(n(n+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2\vartheta}\right)P = 0.$$

$$(2) \quad \frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\frac{dF}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)F = 0.$$

Dagegen führt $\nabla.^2 = 0$ auf zwei neue Functionen definirt durch die Gleichungen:

$$(1a) \quad \sin\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{dp}{d\vartheta} + \left(n(n+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2\vartheta}\right)p = 0,$$

$$(2a) \quad x\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{df}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)f = 0,$$

[1]) cf. pag. 10, 25 und 29 Anm. 1.

welche den Gleichungen (1) und (2) ganz entsprechend ähnlich gebildet sind.

Die Functionen, welche (1) und (2) genügen, werden, wie gewöhnlich, resp. mit P_ν^n, Q_ν^n und J^ν, Y^ν [1]) bezeichnet, diejenigen, welche (1a) und (2a) genügen, resp. mit Θ_ν^n, H_ν^n und ϑ^ν, η^ν.

Die Form der Gleichungen lässt erkennen, dass zwischen den durch sie definirten Functionen, einfache Beziehungen bestehen werden. In der That folgt für $\nu = 0$ ohne Weiteres:

$$(3)\quad \begin{cases} \Theta_0^n = \sin\vartheta \dfrac{dP_0^n}{d\vartheta}, & H_0^n = \sin\vartheta \dfrac{dQ_0^n}{d\vartheta} \text{ [2])} \\ \vartheta^0 = x\dfrac{dJ^0}{dx}, & \eta^0 = x\dfrac{dY^0}{dx}. \end{cases}$$

Es scheint daher von Interesse zu untersuchen, ob die entsprechenden Functionen auch für jeden beliebigen Werth ν durch solche einfache Relationen mit einander verbunden sind.

Dazu transformiren wir die obigen Gleichungen in passende Formen, indem wir setzen:

$$(4)\quad \begin{cases} P = \sin^\nu\vartheta . \mathfrak{P}, & F = x^\nu . \mathfrak{F}, \\ p = \sin^{\varkappa+1}\vartheta . \mathfrak{p}, & f = x^{\varkappa+1}\mathfrak{f}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{f}$ zu bestimmende Functionen und $\varkappa$ eine Constante. Wird diese so bestimmt, dass

$$(5)\qquad \varkappa = \pm\sqrt{\nu^2+1},$$

so gehen die Gleichungen (1), (2), (1a), (2a) der Reihe nach in folgende über:

$$(6)\quad \frac{d^2\mathfrak{P}}{d\vartheta^2} + (2\nu+1)\operatorname{ctg}\vartheta\frac{d\mathfrak{P}}{d\vartheta} + (n-\nu)(n+\nu+1)\mathfrak{P} = 0$$

$$(7)\quad \frac{d^2\mathfrak{F}}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{d\mathfrak{F}}{dx} + \mathfrak{F} = 0,$$

$$(6a)\quad \frac{d^2\mathfrak{p}}{d\vartheta^2} + (2\varkappa+1)\operatorname{ctg}\vartheta\frac{d\mathfrak{p}}{d\vartheta} + (n-\varkappa)(n+\varkappa+1)\mathfrak{p} = 0,$$

$$(7a)\quad \frac{d^2\mathfrak{f}}{dx^2} + \frac{2\varkappa+1}{x}\frac{d\mathfrak{f}}{dx} + \mathfrak{f} = 0.$$

---

[1]) Die zweite BESSEL'sche Function Y^ν ist, wenn ν eine ganze Zahl, durch durch $J^{-\nu}$ zu ersetzen. cf. LOMMEL, Theorie der BESSEL'schen Function.

[2]) cf. pag. 29, Anmerkung 1.

Diese Gleichungen zeigen in Verbindung mit (4) und (5), dass die gesuchten Beziehungen sind bis auf constante Factoren, die hinzu gefügt werden könnten:

$$(8)\quad \begin{cases} \Theta_\nu^n = \sin\vartheta\, P_{\pm\sqrt{\nu^2+1}}^n, & H_\nu^n = \sin\vartheta\, Q_{\pm\sqrt{\nu^2+1}}^n \\ \vartheta^\nu = x\, J^{\pm\sqrt{\nu^2+1}}, & \eta^\nu = x\, J^{\mp\sqrt{\nu^2+1}}. \end{cases}$$

Dieselben enthalten die für $\nu = 0$ gegebenen als specielle Fälle, bis auf Constanten, wie man aus folgenden Relationen erkennt:

$$\frac{dP_\nu^n}{d\vartheta} = -(n-1)P_{\nu+1}^n + \nu\cot\vartheta\, P_\nu^n \text{ [1]}$$

$$\frac{dJ^\nu}{dx} = -J^{\nu+1} + \frac{\nu}{x} J^\nu \text{ [2]},$$

welche ebenso resp. für Q_ν^n, Y_ν^n gelten.

Aus den Formeln (8) folgen ohne Weiteres die Beziehungen:

$$(9)\quad \begin{cases} \Theta_\nu^n = \Theta_{-\nu}^n, & H_\nu^n = H_{-\nu}^n \\ \vartheta^\nu = \vartheta^{-\nu}, & \eta^\nu = \eta^{-\nu}, \end{cases}$$

welche für jeden Werth von ν gelten. Dagegen bestehen nur für ganze ν die ähnlichen Relationen:

$$(9a)\quad \begin{cases} P_\nu^n = P_{-\nu}^n, & Q_\nu^n = Q_{-\nu}^n \text{ [1]} \\ J^\nu = (-1)^\nu J^{-\nu}, & Y^\nu = (-1)^\nu Y^{-\nu} \text{ [2]}. \end{cases}$$

Die Formeln (8) verlangen aber die Definition der Zugeordneten der Kugelfunctionen für irrationale untere Indices.[3]) Nun werden dieselben definirt durch folgende Ausdrücke:

---

[1]) Heine a. o. a. O.
[2]) Lommel a. o. a. O.

(10a) $$P_\nu^n = \sin^\nu\vartheta\,\mathfrak{P}_\nu^n, \qquad Q_\nu^n = \sin^\nu\vartheta\,\mathfrak{Q}_\nu^n,$$

wo $\mathfrak{P}_\nu^n$ und $\mathfrak{Q}_\nu^n$ als particulare Integrale der Gleichung (6) durch die Reihen gegeben sind:

(10b)
$$\begin{cases} \mathfrak{P}_\nu^n = \cos^{n-\nu}\vartheta - \dfrac{(n-\nu)\,(n-\nu-1)}{2.(2n-1)}\cos^{n-\nu-2}\vartheta \\ + \dfrac{(n-\nu)\,(n-\nu-1)\,(n-\nu-2)\,(n-\nu-3)}{2.4.(2n-1)\,(2n-3)}\cos^{n-\nu-4}\vartheta - \ldots \\ \mathfrak{Q}_\nu^n = \cos^{-n-\nu-1}\vartheta + \dfrac{(n+\nu+1)\,(n+\nu+2)}{2.(2n+3)}\cos^{-n-\nu-3}\vartheta \\ + \dfrac{(n+\nu+1)\,(n+\nu+2)\,(n+\nu+3)\,(n+\nu+4)}{2.4.(2n+3)\,(2n+5)}\cos^{-n-\nu-5}\vartheta + \ldots, \end{cases}$$

die in Heine's Lehrbuch aus einer von Jacobi gegebenen Differentialformel abgeleitet werden und darum nur für ganze Indices n und ν gelten. Die Methode der unbestimmten Coëfficienten giebt dieselben Reihen ohne diese Beschränkung. Und in der That ist für die Convergenz dieser Reihen nicht erforderlich, dass n und ν ganze Zahlen seien, wenn nur rationale.

Aber zur Definition für Kugelfunctionen mit irrationalen Indices können die obigen Reihen nicht dienen, also auch nicht die Beziehungen (8) zur Definition der Functionen Θ_ν^n, H_ν^n. Wir haben eine andere Darstellung derselben zu suchen.

Die Definitionsgleichung (1a) geht für $\cos\vartheta = \mu$ in folgende über:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2p}{d\mu^2} + \left(n(n+1) - \frac{\nu^2}{1-\mu^2}\right)p = 0.$$

Und dieser Gleichung genügt eine Lösung von der Form: $A_0(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} + A_1(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}+1} + \ldots$. Bezeichnet nun Z_m^n folgende Reihe:

---

3) Die Bessel'schen Functionen für nicht ganze Indices sind von Lommel a. a. O. definirt, die Kugelfunctionen dagegen nur für ganze Indices, wenn von der Definition derselben durch C. Neumann abgesehen wird, der seiner Abhandlung: Theorie der Kugelfunctionen, ganz allgemeine Coordinaten zu Grunde legt Schlömilch Zeitschrift XII.

$$Z_m^n = \sin^m \vartheta \left\{ 1 + \frac{(m-1-n)(m+n)}{4m} \sin^2\vartheta \right.$$

$$(11) \quad + \frac{(m-1-n)(m+n)(m+n)(m+1-n)(m+2+n)}{2.4m(m+1)} \sin^4\vartheta$$

$$+ \frac{(m-1-n)(m+n)(m+1-n)(m+2+n)(m+3-n)(m+4+n)}{3.4.m.(m+1)(m+2)}$$

$$\left. [\sin^6\vartheta + \ldots \right.$$

welche für beliebige, endliche Werthe der Constanten convergirt, mit Ausnahme negativer m, so ist die allein mögliche Darstellung der Functionen Θ_ν^n, H_ν^n:

$$(12) \quad \Theta_\nu^n = Z^n_{1+\sqrt{\nu^2+1}}, \qquad H_\nu^n = Z^n_{1-\sqrt{\nu^2+1}},$$

so das die ersten Relationen (9) richtig bleiben. Diese Definition wird nur für den unteren Index $\sqrt{\varkappa^2-1}$ unmöglich, wo $\varkappa$ eine ganze Zahl. Aber hier behalten die ersten der Relationen (8) ihre Gültigkeit, nämlich:

$$(12a) \quad \Theta^n_{\sqrt{\varkappa^2-1}} = \sin\vartheta\, P_\varkappa^n, \qquad H^n_{\sqrt{\varkappa^2-1}} = \sin\vartheta\, Q_\varkappa^n$$

Nach Darstellung der Functionen Θ, H dienen nun die ersten Beziehungen (8) zur Definition der Kugelfunctionen für den irrationalen, unteren Index $\sqrt{\nu^2+1}$. Also haben wir:

$$P^n_{\sqrt{\nu^2+1}} = \frac{1}{\sin\vartheta} Z^n_{1+\sqrt{\nu^2+1}}, \qquad Q^n_{\sqrt{\nu^2+1}} = \frac{1}{\sin\vartheta} Z_{1-\sqrt{\nu^2+1}}.$$

Dabei ist zu bemerken, dass diese P, Q neue Functionen sind, die sich wesentlich von denen mit ganzen, unteren Indices unterscheiden. Keine von ihnen hat den Charakter einer ganzen Function.

Was die Functionen ϑ^ν und γ_1^ν anbelangt, so können die zweiten Relationen (8) zu ihrer Definition dienen, sofern die Berechtigung der Lommel'schen Darstellung von $J^{\pm n}$ für nicht ganze n anerkannt wird.[1]) Dies soll hier geschehen, da es nicht Zweck dieses Anhanges sein kann, in diese Untersuchungen tiefer einzudringen. Wir haben daher nur noch über das Vorzeichen der Wurzel in den Beziehungen

$$\vartheta^\nu = x J^{\pm\sqrt{\nu^2+1}}, \qquad \gamma_1^\nu = x J^{\mp\sqrt{\nu^2+1}}$$

---

[1]) Lommel, Studien etc. cf. Hankel, Math. Annal. Bd. 1 pag. 405, Anm.

zu entscheiden. Durch Umkehrung nun oder auch, indem man in die Definitionsgleichung der BESSEL'schen Functionen für J xJ einführt, erhält man:

$$J^{\nu} = \frac{c_1}{x}\,\vartheta^{\pm\sqrt{\nu^2-1}}, \qquad J^{-\nu} = \frac{c_2}{x}\,\eta^{\pm\sqrt{\nu^2-1}},$$

wo c_1 und c_2 zu bestimmende Constanten sind, und wo $J^{-\nu}$ durch Y^{ν} zu ersetzen ist, wenn ν eine ganze Zahl. Durch Anwendung der vorhergehenden Beziehungen auf diese letzten geht zunächst die erste derselben mit Rücksicht darauf, dass nach (9) $\vartheta^{\nu} = \vartheta^{-\nu}$, über in:

$$J^{\nu} = c_1 J^{\pm\nu}.$$

Hieraus folgt offenbar wegen (9a), dass $c_1 = 1$ und das positive Vorzeichen der Wurzel zu nehmen ist, wenn ν keine ganze Zahl; dass dagegen, wenn ν eine ganze Zahl, entweder $c_1 = 1$ und das positive Vorzeichen oder $c_1 = (-1)^{\nu}$ und das negative Vorzeichen zu nehmen ist. Aehnliches gilt über das Vorzeichen der Wurzel in η, sowie über die Constante c_2. Wir haben also die Formeln:

1) ν keine ganze Zahl:

$$(14)\qquad \vartheta^{\nu} = x\,J^{+\sqrt{\nu^2+1}}, \qquad \eta^{\nu} = x\,J^{-\sqrt{\nu^2+1}}$$
$$J^{\nu} = \frac{1}{x}\,\vartheta^{\pm\sqrt{\nu^2-1}}, \qquad J^{-\nu} = \frac{1}{x}\,\eta^{\pm\sqrt{\nu^2-1}};$$

2) ν eine ganze Zahl; es gelten entweder dieselben Formeln, nur dass $J^{-\nu}$ durch Y^{ν} zu ersetzen ist, oder folgende:

$$\vartheta^{\nu} = x\,J^{-\sqrt{\nu^2+1}} \qquad \eta^{\nu} = x\,J^{+\sqrt{\nu^2+1}}$$
$$(14a)$$
$$J^{\nu} = \frac{(-1)^{\nu}}{x}\,\vartheta^{\pm\sqrt{\nu^2-1}}, \qquad Y^{\nu} = \frac{(-1)^{\nu}}{x}\,\eta^{\pm\sqrt{\nu^2-1}}.$$

Zum Schluss mögen noch folgende Integralbeziehungen erwähnt werden, die leicht aus den Differentialgleichungen mit Rücksicht auf die gegebenen Reihenentwickelungen abgeleitet werden können. Diese sind:

$$\int_0^\pi \frac{\Theta_\nu^n \Theta_\nu^{n'}}{\sin\vartheta}\, d\vartheta = 0 \quad n \lesseqgtr n'$$

$$\int_0^\pi \frac{\Theta_\nu^n \Theta_{\nu'}^n}{\sin^3\vartheta}\, d\vartheta = 0 \quad \nu \lesseqgtr \nu'$$

$$\int_0^\pi \frac{\Theta_\nu^n P_{\nu'}^n}{\sin^2\vartheta}\, d\vartheta = 0, \quad \nu \lesseqgtr \nu',$$ n und ν ganze Zahlen ausser $\nu = 0$, $\nu' = 1$.

Aehnliche Beziehungen gelten für die H_ν^n.

Thesen.

1. Den Erfahrungssätzen der Naturwissenschaft kommt objective Gültigkeit zu.
2. Die auf möglichst einfache Grundvorstellungen gegründete mathematische Speculation kann nicht zu einer wahren Erklärung der complicirten Naturerscheinungen führen.
3. Der bildende Werth der Naturwissenschaft für höhere Lehranstalten wird zu wenig berücksichtigt.

Lebenslauf.

Ich, Paul Jaerisch, geboren am 25. März 1853 zu Rosen, Kreis Creuzburg, bin der Sohn des verstorbenen ev. Pastors Ludwig Jaerisch. Michaelis 1873 verliess ich das Gymnasium zu Oels mit dem Zeugniss der Reife. Von dieser Zeit an widmete ich mich auf hiesiger Universität besonders dem Studium der Mathematik und Physik und hörte die Vorlesungen der Herren: Bachmann, Cohn, Dilthey, Dorn, Galle, Grube, Krause, Lobwig, Meyer, Roemer, Rosanes, Schroeter. Während vier Semester war ich Mitglied des von Herrn Prof. Meyer und Herrn Prof. Schroeter geleiteten mathematisch-physikalischen Seminars. Auch nahm ich an den mathematischen Uebungen des Herrn Prof. Rosanes und den philosophischen des Herrn Prof. Dilthey Theil und arbeitete ein Semester hindurch im physikalischen Kabinet unter Leitung der Herren Prof. Dorn und Meyer.

Allen meinen hochverehrten Lehrern, insbesondere Herrn Professor Dr. O. E. Meyer spreche ich an dieser Stelle für alle Anleitung und fördernde Anregung meinen herzlichsten Dank aus.